EXERCICE N°1 : 25' 4 points

Lors d'une enquête réalisée auprès de familles d'une région, concernant leur habitation principale, on apprend que 55% des familles interrogées sont propriétaires de leur logement, **40%** locataires et **5%** occupent leur logement à titre gratuit. Toutes les familles interrogées habitent soit une maison individuelle, soit un appartement ; toute habitation ne contient qu'une seule famille.
60% des propriétaires habitent une maison individuelle, **80%** des locataires habitent un appartement et **10%** des occupants à titre gratuit habitent une maison individuelle.

1°) On interroge au hasard une famille de la région et on note tes événements :
A : « la famille habite un appartement » , **L : «la famille est locataire »**,
P : «la famille est propriétaire » et **G « la famille est occupant à titre gratuit »**.

a) Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes : $p(\overline{A}/P)$, $p(\overline{A}/L)$, $(\overline{A}/G)$.

b) Construire un arbre pondéré résumant la situation.

c) Calculer la probabilité de l'événement « la famille est propriétaire et habite un appartement » et montrer que p(A) = 0,585.

2°) a) On interroge au hasard une famille habitant un appartement.
Calculer la probabilité qu'elle soit propriétaire.

b) On interroge au hasard une famille habitant une maison individuelle.
Calculer la probabilité qu'elle ne soit pas propriétaire.

EXERCICE N°2 : 45' 6 points

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}1+\ln(1-x) & si\ x\le 0\\ x+e^{-x} & si\ x>0\end{cases}$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Montrer que f est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 ; interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; interpréter graphiquement le résultat.

2°) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer $\Delta: y=x$ est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

c) Tracer la courbe C_f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ en indiquant les deux demi-tangentes au point d'abscisse 0.

3°) On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty,0]$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty,0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter $h^{-1}(x)$, $x\in J$.

c) Tracer la courbe Γ de h^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

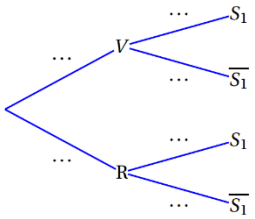
4°) Soit φ la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par : $\varphi(x)=x+(x-1)\ln^2(1-x)$.

a) Calculer $\varphi'(x)$, pour $x\in]-\infty,0]$.

b) Soient $C=\{M(x,y), \text{tels que } y=1+\ln(1-x),\ -1\le x\le 0\}$ et S le solide obtenu par rotation de C_f autour de l'axe (Ox). En déduire le volume $\mathcal{V}$ de solide S.

EXERCICE N°3 : 25' 4 points

Une urne contient trois dés équilibrés, deux d'entre eux sont verts et possèdent six faces numérotées de 1 à 6 et le troisième est rouge possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6.
On prend un dé au hasard de l'urne et on le lance. (les résultats seront données sous forme de fractions).
On considère les évènements suivants : V « le dé tiré est vert ».
R « le dé tiré est rouge ».
S_1 « on obtient 6 au lancer du dé ».



1°) On tire au hasard un dé de l'urne et on effectue un lancer de celui-ci.
a) Recopier et compléter l'arbre ci-dessous.
b) Calculer la probabilité $p(S_1)$.
c) Sachant qu'on a obtenu le numéro 6 sur le dé lancé, calculer la probabilité qu'il soit rouge.

2°) On tire au hasard un dé de l'urne. Pour tout entier naturel n non nul, on lance n fois de suite ce dé.
On désigne par S_n l'évènement « on obtient 6 à chacun des n lancés ».
a) Exprimer $p(S_n)$ en fonction de n.
b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun de n lancers.
Montrer que pour tout $n \in IN^*$: $p_n = \dfrac{1}{2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$.
c) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que : $p_n \geq 0{,}999$ pour tout $n \geq n_0$.

EXERCICE N°4 : 40' 6 points

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} - e^{-x}$.
On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité graphique 2cm).

1°) a) Montrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $f'(x) > 0$.
b) Dresser le tableau des variations de f sur $]-1,+\infty[$.

2°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $]-1,+\infty[$, une unique solution α.
Vérifier que : $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$.

3°) Tracer (ζ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4°) Soit n un entier naturel non nul. On pose U_n la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, n]$.
a) Vérifier que pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{x-1}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$.
b) En déduire que : $\int_0^n \dfrac{x-1}{x+1}\,dx = n - 2\ln(n+1)$.
c) Montrer que $U_n = 1 + \dfrac{e^{-n}-1}{n} - \dfrac{2\ln(n+1)}{n}$.
d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.